

---

## Infoblatt „Wahrscheinlichkeitstheorie II“

Stand: WS 2017/18

### Umfang

3 SWS Vorlesung pro Woche und 2 SWS Übung alle 2 Wochen

### Prüfungsmodalitäten

1,5-stündige Klausur

### Empfohlene Voraussetzungen

Wahrscheinlichkeitstheorie I, Analysis I-III, Lineare Algebra I-II

## Inhaltliche Schwerpunkte

Der Fokus der Lehrveranstaltung [Wahrscheinlichkeitstheorie II](#) liegt auf der Vertiefung der Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Zur Erinnerung: [Wahrscheinlichkeitstheorie I](#) = Einführung in die Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie -> Maßtheorie; Wahrscheinlichkeitsbegriff, Axiomatik, Wahrscheinlichkeitsräume; Zufallsvariablen; spezielle Verteilungen; Konvergenz und Grenzwertsätze.

## Gliederung

- Kap 0: Vertiefung Maßtheorie (Konstruktion von Maßen, Fortsetzung Prämaß, Produktmaße)
- Kap 1 Vertiefung Konvergenzarten [[Kü](#) Kap. 7, [S](#) Kap. 14-15]  
Hierarchie Konvergenzarten:  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$   $\mathbb{P}$ -f.s.,  $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ ,  $X_n \xrightarrow{weak} X$ ,  $p$ -ten Mittel. Fast überall bestehende Eigenschaften. Lemma Borel-Cantelli.
- Kap 2: Integrationstheorie [Vgl. [Kü](#) Kap. 5 + 7.2, [S](#) Kap. 8 + 9]
  - 2.1 Konstruktion Lebesgue-Integral (algebraische Induktion,  $\mu$ -Integral,  $\mu$ -integrierbar)
  - 2.2 Konvergenzsätze (Satz von der monotonen Konvergenz. Lemma von Fatou. Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz)
  - 2.3 Riemann- versus Lebesgue-Integral.  $L^p$ -Räume.

2.4 Integration bezüglich eines Bildmaßes (Definition, Anwendungen: Integration nach einem zusammengesetztem Maß mit Dichte, Integration nach einem Produktmaß - Fubini, Transformationssätze)

- Kap 3: Bedingte Verteilung unter einer  $\sigma$ -Algebra [Vgl. [Kü] Kap. 10, [S] Kap. 18 - 19]
  - 3.1 Bedingte Erwartung unter einer  $\sigma$ -Algebra
  - 3.2 Bedingte Verteilung unter einer  $\sigma$ -Algebra (bedingte Wahrscheinlichkeit, bedingte Verteilungsfunktion, bedingte stochastische Unabhängigkeit)
  - 3.3 Bedingte Dichte
- Kap 4: Erzeugende und charakteristische Funktion [Vgl. [S] Kap. 16; [T] Kap. 9]
  - 4.1 Wahrscheinlicherzeugende Funktion
  - 4.2 Momenterzeugende Funktion
  - 4.3 Charakteristische Funktion
  - 4.4 Eigenschaften und Beweis ZGWS
- Kap 5 Angewandte W-theorie [Vgl. [S]; [Kü];[Tse]]
  - Kap 5.1 Verteilung von Summen von ZV (Faltungssätze) [Vgl. [S] Kap. 13.5; [Kü] Kap. 8.4]
  - Kap 5.2 Verteilung transformierter ZV (Dichtetransformation und spezielle Verteilungen: EVT, Skalen- und Exponentialfamilie) [Vgl. [S] Kap. 12.2, 13.2; [T] Kap 8]
  - Kap 5.3 Verteilung gestutzter ZV (Mean-Exzess) [Vgl. [S] Kap. 12.1; [GHMSS] Kap. 4]
  - Kap 5.4 Gemischte W-Maße und Verteilungen (Bernoulli- oder Poisson-Mischungsmaße) [Vgl. [S] S. 265; [GHMSS]; [Tse] ]
- Zusatz: Kap 6 Aktuarielle Anwendungen Non-life (Kollektives Risikomodel, RV, Bayes-Credibilityprämie) [Vgl. [GHMSS], [Tse]]

## Übungsblätter

- Wiederholungsblatt Maßtheorie: Algebra,  $\sigma$ -Algebra, Maße, messbare Abbildung, induziertes Bildmaß
1. Ü-blatt: Konvergenzarten, Nullmengen, Gesetze der großen Zahlen, Approximation von Verteilungen, Borel-Cantelli [Kap 1]
  2. Ü-blatt: Integrationstheorie: Konstruktion Lebesgue-Integral, algebraische Induktion, Satz von Lebesgue, Satz von der monotonen Konvergenz, Integration nach Bildmaß und zusammengesetzten Maßen mit Dichte [Kap 2] DAV-Klausuren Stochastik
  3. Ü-blatt: Bedingte Erwartung + bedingte Wahrscheinlichkeiten unter einer  $\sigma$ -Algebra. Bedingte Unabhängigkeit, Bedingte Dichte [Kap 3]

4. Ü-blatt: Wkt-erzeugende Funktion, Momenterzeugende Funktion, Charakteristische Funktion von Summen von ZV. Eigenschaften und Berechnung der Binomialmomente, EW [Kap 4]
5. Ü-blatt: Verteilung von Summen von ZV und Faltungsprodukt, Dichte-Trafo (Skalen- und Exponentialfamilie, EVT). Gestutzte Verteilungen (Mean-Exzess), gemischte W-Maße (Bernoulli- und Poisson-Mischungsmaße). [Kap 5] DAV-Klausuren stoch Modellierung
6. Ü-blatt: Aktuarielle Anwendungen Non-life: Kollektives Risikomodell, RV, Bayes-Credibilityprämie [Kap 6] DAV-Klausuren non-life

## Literatur

- [Ba] Bauer, H. (1992). Maß- und Integrationstheorie, Walter de Gruyter Verlag, Berlin. ISBN 978-3-11-013625-2
- [Kü] Küchler, U. (2016). Maßtheorie für Statistiker, Springer Verlag, Berlin. ISBN 978-3-662-46375-8 (eBook)
- [S] Schmidt, K. D. (2011). Maß und Wahrscheinlichkeit, Springer Verlag, Berlin. ISBN 978-3-642-21026-8

## Statistiksoftware

Die Open-Source Software R wird in der Lehrveranstaltung zu Demonstrationszwecken verwendet - die eigenständige Nutzung empfiehlt sich. In den Lehrveranstaltungen „Statistik I-III“ wird ebenso R benutzt.

- <http://www.r-project.org>
- <http://cran.r-project.org>

## Vertiefende Literatur

- [Bo] Bosch, K. (2011). Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Vieweg Verlag, Wiesbaden. ISBN 978-3-8348-1861-4
- [G] Grimmett, G., Stirzaker, D. (2009). Probability and Random Processes, Oxford University Press, Oxford. ISBN 978-0-19-857222
- [GHMSS] Goelden, H.-W., Hess, K. T., Morlock, M., Schmidt, K. D., Schröter, K. J. (2016). Schadenversicherungsmathematik, Springer Verlag, Berlin. e-ISBN 978-3-662-48860-7 eBook
- [K] Klenke, A. (2013). Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer Verlag, Berlin. ISBN 978-3-642-36018-3
- [Kr] Krenzel, U. (2003). Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Vieweg Verlag, Wiesbaden. ISBN 3-528-67259-5

- [KrZ] Krickeberg, K., Ziezold, H. (1995). Stochastische Methoden, Springer Verlag, Berlin. ISBN 3-540-57792-0
- [L] Ligges, U. (2008). Programmieren mit R, Springer Verlag, Berlin. ISBN 978-3-540-79997-9 / e-ISBN 978-3-540-79998-6
- [M] Mürmann, M. (2014). Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse, Springer Verlag, Berlin. ISBN 978-3-642-38160-7 (eBook)
- [SH] Sachs, L., Hedderich, J. (2011). Angewandte Statistik. Methodensammlung mit R, Springer Verlag, Heidelberg. ISBN 978-3-642-24400-1 / e-ISBN 978-3-642-24401-8
- [T] Tappe, S. (2013). Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer Verlag, Berlin. ISBN 978-3-642-37544-6
- [TH] Toutenburg, H., Heumann, C. (2008). Induktive Statistik. Eine Einführung mit R und SPSS, Springer Verlag, Berlin. e-ISBN 978-3-540-77510-2
- [Tse] Tse, Y. (2009), Nonlife Actuarial Models: Theory, Methods and Evaluation, International Series on Actuarial Science, Cambridge University Press, London.
- [W] Wollschläger, D. (2012). Grundlagen der Datenanalyse mit R, Springer Verlag, Berlin. ISBN 978-3-642-25800-8 (eBook)

---

Viel Spaß!